

1. Estudia el dominio de las siguientes funciones:

Solución.

a) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-9}$: Función Racional, el dominio son todos los números reales excepto los que anulen el denominador.

$$D[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 9 \neq 0\}; x^2 - 9 = 0 : x^2 = 9 : x = \pm 3$$

$$D\left[\frac{x-2}{x^2-9}\right] = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$$

b) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2}$: Función Racional, el dominio son todos los números reales excepto los que anulen el denominador.

$$D[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \neq 0\}; x^2 = 0 : x = 0$$

$$D\left[\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2}\right] = \mathbb{R} - \{0\}$$

Nota. La raíz no impone condiciones al dominio por ser de índice impar.

c) $f(x) = \frac{1}{2x+3} \cdot \sqrt{4-x^2}$ Función Racional con numerador irracional, el dominio lo imponen dos condiciones, todos los números reales excepto los que anulen el denominador que además hagan mayor o igual que cero el radicando de la expresión irracional

$$D[f(x)] = \left\{x \in \mathbb{R} / \begin{cases} 2x+3 \neq 0 \\ 4-x^2 > 0 \end{cases}\right\}$$

$$2x+3=0 : x = -\frac{3}{2} : x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

$$4-x^2 \geq 0 : (2+x) \cdot (2-x) \geq 0$$

$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$	
	\downarrow		\downarrow		$x \in [-2, 2]$
$- \cdot + = -$	0	$+ \cdot + = +$	0	$+ \cdot - = -$	

$$D\left[\frac{1}{2x+3} \cdot \sqrt{4-x^2}\right] = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\} \cap [-2, 2] = [-2, 2] - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

d) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x}}$: Función irracional. El dominio lo forman los números reales que hagan el radicando mayor o igual que cero.

$$D[f(x)] = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{x^2-1}{x} \geq 0\right\}$$

$$\frac{x^2-1}{x} \geq 0 : \begin{cases} \text{Ceros: } x^2-1=0 : x = \pm 1 & \frac{(x+1)(x-1)}{x} \geq 0 \\ \text{Polos: } x=0 & \end{cases}$$

$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
	\downarrow		\downarrow		\downarrow	
$- \cdot - = +$	0	$+ \cdot - = -$	\neq	$+ \cdot - = -$	0	$+ \cdot + = +$

$$D\left[\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}\right] = [-1, 0) \cup [1, +\infty)$$

e) $f(x) = \frac{7-x}{\sqrt{7+x}}$: Función con denominador irracional, el dominio son todos los números reales

que hagan el radicando mayor que cero, en este caso el cero no se admite.

$$D[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} / 7+x > 0\} : 7+x > 0 : x > -7$$

$$D\left[\frac{7-x}{\sqrt{7+x}}\right] = (-7, +\infty)$$

f) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{9x^2-16}}$: Función con denominador irracional, el dominio son todos los números

reales que hagan el radicando mayor que cero.

$$D[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} / 9x^2 - 16 > 0\}$$

$$(9x^2-16) > 0 : (3x+4) \cdot (3x-4) > 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} (-\infty, -\frac{4}{3}) & -\frac{4}{3} & (-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) & \frac{4}{3} & (\frac{4}{3}, +\infty) & & \\ \hline -2 & & 0 & & 2 & & \\ \vdots & \downarrow & \vdots & \downarrow & \vdots & & \\ \dots & + & \dots & - & \dots & + & + & + & \dots \end{array}$$

$$D\left[\frac{5}{\sqrt{9x^2-16}}\right] = \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$$

g) $f(x) = \sqrt{-12+7x-x^2}$: Función irracional. El dominio lo forman los números reales que hagan el radicando mayor o igual que cero.

$$D[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} / -x^2 + 7x - 12 \geq 0\}$$

$$-x^2 + 7x - 12 \geq 0 : -(x-3) \cdot (x-4) \geq 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} (-\infty, 3) & 3 & (3, 4) & 4 & (4, +\infty) & & \\ \hline 2 & & 3,5 & & 5 & & \\ \vdots & \downarrow & \vdots & \downarrow & \vdots & & \\ \dots & - & \dots & + & \dots & + & \dots & + & \dots \end{array}$$

$$D\left[\sqrt{-12+7x-x^2}\right] = [3, 4]$$

h) $f(x) = \sqrt{4-\frac{9x^2}{25}}$: Función irracional. El dominio lo forman los números reales que hagan el radicando mayor o igual que cero.

$$f(x) = \sqrt{4-\frac{9x^2}{25}} = \sqrt{\frac{100-9x^2}{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{100-9x^2}$$

$$100 - 9x^2 \geq 0 : 10^2 - (3x)^2 \geq 0 : (10-3x) \cdot (10+3x) \geq 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} (-\infty, -\frac{10}{3}) & -\frac{10}{3} & (-\frac{10}{3}, \frac{10}{3}) & \frac{10}{3} & (\frac{10}{3}, +\infty) & & \\ \hline -4 & & 0 & & 4 & & \\ \vdots & \downarrow & \vdots & \downarrow & \vdots & & \\ \dots & - & \dots & + & \dots & + & \dots & - & \dots \end{array}$$

$$D\left[\sqrt{4-\frac{9x^2}{25}}\right] = \left[-\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right]$$

i) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 5x + 4}}$: Función irracional. El dominio lo forman los números reales que hagan el radicando mayor o igual que cero.

$$D[f(x)] = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 5x + 4} \geq 0 \right\}$$

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 5x + 4} \geq 0 : \begin{cases} x^2 + 5x + 4 = 0 : \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \end{cases} \\ x^2 - 5x + 4 = 0 : \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases} \end{cases} : \frac{(x+4) \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x-4)} \geq 0$$

(-∞, -4)	-4	(-4, -1)	-1	(-1, 1)	1	(1, 4)	4	(4, ∞)
-5	-4	-2	-1	0	1	2	4	5
- - - = +		+ - - = -		- - - = +		+ - - = -		- - - = +
- - - = +	0	- - - = -	0	- - - = +	0	+ - - = -	0	- - - = +

$$D \left[\sqrt[4]{\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 5x + 4}} \right] = (-\infty, -4] \cup [-1, 1) \cup (4, +\infty)$$

j) $f(x) = \frac{3 + \sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}}$: Función Racional con expresiones irracionales, el dominio lo imponen dos condiciones, todos los números reales excepto los que anulen el denominador que además hagan mayor o igual que cero los radicandos de las expresiones irracionales.

$$D[f(x)] = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x \geq 0 \\ 3 - \sqrt{x} \neq 0 \end{matrix} \right\} : \begin{cases} x \geq 0 : x \in [0, +\infty) \\ 3 - \sqrt{x} \neq 0 : x \neq 9 \end{cases}$$

$$D \left[\frac{3 + \sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} \right] = [0, 9) \cup (9, +\infty) = [0, +\infty) - \{9\}$$

k) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{1-2x^2}}$ Función con denominador irracional, el dominio son todos los números reales que hagan el radicando mayor que cero.

$$D[f(x)] = \left\{ x \in \mathbb{R} / 1 - 2x^2 > 0 \right\}$$

$$D \left[\frac{3}{\sqrt{1-2x^2}} \right] = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

l) $f(x) = \text{Ln} \left(\frac{x \cdot (x+1)}{x^3 - 1} \right)$: Función logarítmica. El dominio lo forman los números reales que hagan el argumento mayor que cero.

$$D[f(x)] = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x^2 + x + 1)} > 0 \right\}$$

$$\frac{x \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x^2 + x + 1)} > 0 : \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 0 : x = -1 \\ x-1 = 0 : x = 1 \end{cases}$$

(-∞, -1)	-1	(-1, 0)	0	(0, 1)	1	(1, ∞)
-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
- - - = -		+ - - = +		- - - = -		+ - - = +
- - - = -	0	- - - = +	0	- - - = -	0	+ - - = +

$$D \left[\text{Ln} \left(\frac{x \cdot (x+1)}{x^3 - 1} \right) \right] = (-1, 0) \cup (1, +\infty)$$

m) $f(x) = \text{Ln} \frac{x+4}{x-3}$

$$D[f(x)] = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x+4}{x-3} > 0 \right\}$$

$$\frac{x+4}{x-3} > 0 : \begin{cases} x+4=0 : x=-4 \\ x-3=0 : x=3 \end{cases} \quad \begin{array}{ccccccc} (-\infty, -4) & -4 & (-4, 3) & 3 & (3, +\infty) \\ -5 & \downarrow & 0 & \downarrow & 4 \\ - \cdot - = + & \downarrow & + \cdot - = - & \downarrow & + \cdot + = + \\ & 0 & & 0 & \end{array}$$

$$D\left[\text{Ln} \frac{x+4}{x-3}\right] = (-\infty, -4) \cup (3, +\infty)$$

n) $f(x) = e^{1-x^2}$

La función exponencial no impone restricciones al dominio, si el exponente es un número real, existe su exponencial, por lo tanto:

$$D[\text{Función exponencial}] D[\text{Exponente}]$$

$$D\left[e^{1-x^2}\right] = D[1-x^2] = \mathbb{R}$$

o) $f(x) = e^{1/x}$

$$D\left[e^{1/x}\right] = D\left[\frac{1}{x}\right] = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

p) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

$$D\left[e^{\sqrt{x}}\right] = D[\sqrt{x}] = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = [0, +\infty)$$

2. Sean las funciones:

$$f(x) = \frac{1}{3x-1} \quad ; \quad g(x) = \frac{2}{6x+2} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

calcular:

a) $f(x) + g(x) - h(x)$ b) $\frac{f(x) - h(x)}{g(x)}$
 c) $f(x) \cdot g(x)$ d) $\frac{g(x) \cdot h(x)}{f(x)}$

Solución.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) + g(x) - h(x) &= \frac{1}{3x-1} + \frac{2}{6x+2} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{3x-1} + \frac{2}{2 \cdot (3x+1)} - \frac{x+1}{x-1} = \\ &= \frac{1}{3x-1} + \frac{1}{3x+1} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{1 \cdot (3x+1) \cdot (x-1) + 1 \cdot (3x-1) \cdot (x-1) - (x+1) \cdot (3x-1) \cdot (3x+1)}{(3x-1) \cdot (3x+1) \cdot (x-1)} = \\ &= \frac{3x^2 - 2x - 1 + 3x^2 - 4x + 1 - (x+1) \cdot (9x^2 - 1^2)}{(9x^2 - 1^2) \cdot (x-1)} = \frac{6x^2 - 6x - (9x^3 + 9x^2 - x - 1)}{9x^3 - 9x^2 - x + 1} = \frac{-9x^3 - 3x^2 - 5x + 1}{9x^3 - 9x^2 - x + 1} \\ \text{b) } \frac{f(x) - h(x)}{g(x)} &= \frac{\frac{1}{3x-1} - \frac{2}{2(3x+1)}}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{\frac{1}{3x-1} - \frac{1}{3x+1}}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1 \cdot (3x+1) - 1 \cdot (3x-1)}{(3x-1) \cdot (3x+1)} = \frac{3x+1 - 3x+1}{9x^2 - 1^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{2}{9x^2-1}}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{2 \cdot (x-1)}{(9x^2-1) \cdot (x+1)} = \frac{2x-2}{9x^3+9x^2-x-1}$$

$$\text{c) } f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{3x-1} \cdot \frac{2}{6x+2} = \frac{1}{3x-1} \cdot \frac{2}{2 \cdot (3x+1)} = \frac{1}{(3x-1) \cdot (3x+1)} = \frac{1}{9x^2-1^2} = \frac{1}{9x^2-1}$$

$$\text{d) } \frac{g(x) \cdot h(x)}{f(x)} = \frac{\frac{2}{2(3x+1)} \cdot \frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{3x-1}} = \frac{\frac{1}{3x+1} \cdot \frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{3x-1}} = \frac{(3x-1) \cdot (x+1)}{(3x+1) \cdot (x-1)} = \frac{3x^2+2x-1}{3x^2-2x-1}$$

3. Calcular la inversa, $[f^{-1}(x)]$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{2x+6}$

b) $f(x) = 4 - x^2$

c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

d) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{2-x}}$

e) $f(x) = x^3 + 5$

f) $f(x) = \frac{5x-3}{2-x}$

g) $f(x) = e^{1-x^2}$

h) $f(x) = \text{Ln} \frac{x-1}{x-2}$

Solución.

Pasos a seguir para calcular la inversa de una función:

1. sustituye x por y e y por x
2. Se despeja y en función de x
3. Se sustituye y por $f^{-1}(x)$

a) $f(x) = 4 - x^2$

1. Se sustituye x por y e y por x: $x = \frac{1}{2y+6}$

2. Se despeja y en función de x: $2y-6 = \frac{1}{x} : 2y = \frac{1}{x} - 6 = \frac{1-6x}{x} : y = \frac{1-6x}{2}$

3. Se sustituye y por $f^{-1}(x)$: $f^{-1}(x) = \frac{1-6x}{2}$

b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

1. Se sustituye x por y e y por x: $x = \frac{y^2+1}{y^2-1}$

2. Se despeja y en función de x: $x = \frac{y^2+1}{y^2-1} : x \cdot (y^2-1) = y^2+1 : xy^2 - x = y^2+1$

$$xy^2 - y^2 = x+1 : y^2 \cdot (x-1) = x+1 : y^2 = \frac{x+1}{x-1} : y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

3. Se sustituye y por $f^{-1}(x)$: $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{2-x}}$

1. Se sustituye x por y e y por x: $x = \sqrt{\frac{2y+1}{2-y}}$
2. Se despeja y en función de x: $x = \sqrt{\frac{2y+1}{2-y}} : x^2 = \frac{2y+1}{2-y} : x^2 \cdot (2-y) = 2y+1$
 $2x^2 - yx^2 = 2y+1 : 2x^2 - 1 = 2y + yx^2 : 2x^2 - 1 = y \cdot (2+x^2) : y = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 2}$
3. Se sustituye y por $f^{-1}(x)$: $f^{-1}(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 2}$

d) $f(x) = x^3 + 5$

1. Se sustituye x por y e y por x: $x = y^3 + 5$
2. Se despeja y en función de x: $y = \sqrt[3]{x-5}$
3. Se sustituye y por $f^{-1}(x)$: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5}$

e) $f(x) = \frac{5x-3}{2-x}$

1. Se sustituye x por y e y por x: $x = \frac{5y-3}{2-y}$
2. Se despeja y en función de x: $x = \frac{5y-3}{2-y} : x \cdot (2-y) = 5y-3 : 2x - xy = 5y-3$
 $2x+3 = 5y+xy : y \cdot (5+x) = 2x+3 : y = \frac{2x+3}{5+x}$
3. Se sustituye y por $f^{-1}(x)$: $f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{5+x}$

f) $f(x) = e^{1-x^2}$

1. Se sustituye x por y e y por x: $x = e^{1-y^2}$
2. Se despeja y en función de x: $x = e^{1-y^2} : \ln x = \ln e^{1-y^2} : \ln x = 1 - y^2 : y^2 = 1 - \ln x$
 $y = \sqrt{1 - \ln x}$
3. Se sustituye y por $f^{-1}(x)$: $f^{-1}(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

g) $f(x) = \ln \frac{x-1}{x-2}$

1. Se sustituye x por y e y por x: $x = \ln \frac{y-1}{y-2}$
2. Se despeja y en función de x: $x = \ln \frac{y-1}{y-2} : e^x = e^{\ln \frac{y-1}{y-2}} : e^x = \frac{y-1}{y-2} : e^x (y-2) = y-1$
 $ye^x - 2e^x = y-1 : ye^x - y = 2e^x - 1 : y(e^x - 1) = 2e^x - 1 : y = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$
3. Se sustituye y por $f^{-1}(x)$: $f^{-1}(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$

4. Sean las funciones:

$$f(x) = 3x - 2 \qquad g(x) = \frac{1}{x} \qquad h(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$$

Calcular:

- a) $f \circ g$
- b) $g \circ f$
- c) $f \circ (h \circ g)$

Solución.

$$\text{a) } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 3x - 2 \\ g(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right\} = 3g(x) - 2 = 3 \cdot \frac{1}{x} - 2 = \frac{3 - 2x}{x}$$

$$\text{b) } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \left\{ \begin{array}{l} g(x) = \frac{1}{x} \\ f(x) = 3x - 2 \end{array} \right\} = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{3x - 2}$$

c) $(f \circ (h \circ g))(x) = f(h(g(x)))$: Se empieza calculando $h(g(x))$.

$$h(g(x)) = \left\{ \begin{array}{l} h(x) = \frac{2x + 3}{x - 1} \\ g(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right\} = \frac{2g(x) + 3}{g(x) - 1} = \frac{2 \cdot \frac{1}{x} + 3}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{\frac{2 + 3x}{x}}{\frac{1 - x}{x}} = \frac{2 + 3x}{1 - x}$$

Calculado $h(g(x))$, se calcula $f(h(g(x)))$.

$$f(h(g(x))) = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 3x - 2 \\ h(g(x)) = \frac{2 + 3x}{1 - x} \end{array} \right\} = 3h(g(x)) - 2 = 3 \cdot \frac{2 + 3x}{1 - x} - 2 = \frac{9x + 6 - 2 \cdot (1 - x)}{1 - x} = \frac{11x + 4}{1 - x}$$

5. Sean las funciones:

$$f(x) = \text{sen } x \qquad g(x) = x^2$$

Calcular:

- a) $f \circ g$
- b) $g \circ f$
- c) $g \circ (f \circ g)$

Solución.

$$\text{a) } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \text{sen } x \\ g(x) = x^2 \end{array} \right\} = \text{sen}(g(x)) = \text{sen}(x^2)$$

$$\text{b) } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \left\{ \begin{array}{l} g(x) = x^2 \\ f(x) = \text{sen } x \end{array} \right\} = (f(x))^2 = (\text{sen } x)^2 = \text{sen}^2 x$$

$$\text{c) } (g \circ (f \circ g))(x) = g(f(g(x))) = \left\{ \begin{array}{l} g(x) = x^2 \\ f(g(x)) = \text{sen } x^2 \end{array} \right\} = (f(g(x)))^2 = (\text{sen } x^2)^2 = \text{sen}^2 x^2$$

6. Sean $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = 3x$, comprueba que no se verifica la propiedad distributiva de la composición de funciones respecto la suma:

$$f \circ (g + h) \neq f \circ g + f \circ h$$

Solución.

Se hace cada composición por separado, y se comprueba que son diferentes.

$$(f \circ (g + h))(x) = f(g(x) + h(x)) = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) + h(x) = 4x + 1 \end{array} \right\} = (g(x) + h(x))^2 = (4x + 1)^2 = 16x^2 + 8x + 1$$

$$(f \circ g + f \circ h)(x) = f(g(x)) + f(h(x)) = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = x + 1 \\ h(x) = 3x \end{array} \right\} = (g(x))^2 + (h(x))^2 = (x + 1)^2 + (3x)^2 = 10x^2 + 2x + 1$$

7. Comprobar que se cumple: $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ siendo:

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+3}; \quad g(x) = 2x+4$$

Solución.

Se calcula cada término de la igualdad por separado.

Primer miembro de la igualdad:

- Cálculo de $(f \circ g)(x)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{3g(x)+2}{g(x)+3} = \frac{3 \cdot (2x+4)+2}{2x+4+3} = \frac{6x+14}{2x+7}$$

- Cálculo de $(f \circ g)^{-1}(x)$

1. Se sustituye x por y e y por x: $x = \frac{6y+14}{2y+7}$

2. Se despeja y en función de x: $x = \frac{6y+14}{2y+7} : x(2y+7) = 6y+14 : 2xy+7x = 6y+14$

$$2xy - 6y = 14 - 7x : y(2x - 6) = 14 - 7x : y = \frac{14 - 7x}{2x - 6}$$

3. Se sustituye y por $(f \circ g)^{-1}$: $(f \circ g)^{-1}(x) = f^{-1}(g(x)) = \frac{14 - 7x}{2x - 6}$

2º miembro de la igualdad:

- $f^{-1}(x)$

1. Se sustituye x por y e y ($f(x)$) por x: $x = \frac{3y+2}{y+3}$

2. Se despeja y en función de x: $x = \frac{3y+2}{y+3} : x(y+3) = 3y+2 : xy+3x = 3y+2$

$$xy - 3y = 2 - 3x : y(x - 3) = 2 - 3x : y = \frac{2 - 3x}{x - 3}$$

3. Se sustituye y por $f^{-1}(x)$: $f^{-1}(x) = \frac{2 - 3x}{x - 3}$

- $g^{-1}(x)$

1. Se sustituye x por y e y ($g(x)$) por x: $x = 2y + 4$

2. Se despeja y en función de x: $x = 2y + 4 : y = \frac{x - 4}{2}$

3. Se sustituye y por $g^{-1}(x)$: $g^{-1}(x) = \frac{x - 4}{2}$

- $g^{-1} \circ f^{-1}$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = \frac{f^{-1}(x) - 4}{2} = \frac{\frac{2 - 3x}{x - 3} - 4}{2} = \frac{2 - 3x - 4(x - 3)}{2(x - 3)} = \frac{2 - 3x - 4x + 12}{2x - 6} = \frac{14 - 7x}{2x - 6}$$

Se demuestra que $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

8. Si $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$, $g(x) = \frac{1+3x}{1-x}$, hallar:

- a) $f \circ g$
- b) $g \circ f$
- c) f^{-1} y g^{-1}

Solución.

a) a) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$: Se sustituye la variable x de la función f por la función g .

$$f(g(x)) = \frac{g(x)-1}{g(x)+3} = \frac{\frac{1+3x}{1-x}-1}{\frac{1+3x}{1-x}+3} = \frac{\frac{1+3x-1 \cdot (1-x)}{1-x}}{\frac{1+3x+3 \cdot (1-x)}{1-x}} = \frac{1+3x-1+x}{1+3x+3-3x} = \frac{4x}{4} = x$$

b) b) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$: Se sustituye la variable x de la función g por la función f .

$$g(f(x)) = \frac{1+3f(x)}{1-f(x)} = \frac{1+3 \cdot \frac{x-1}{x+3}}{1-\frac{x-1}{x+3}} = \frac{\frac{1 \cdot (x+3)+3 \cdot (x-1)}{x+3}}{\frac{1 \cdot (x+3)-(x-1)}{x+3}} = \frac{x+3+3x-3}{x+3-x+1} = \frac{4x}{4} = x$$

d) Si la composición de dos funciones es la función identidad ($I(x) = x$), las funciones son inversas entre si, y además la composición es conmutativa ($(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$). Teniendo en cuenta esto:

$$f^{-1}(x) = \frac{1+3x}{1-x}$$

$$g^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+3}$$

9. Dadas las funciones : $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ $g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ $h(x) = x^2 + x$

- a) Calcular sus dominios
- b) Estudiar sus simetrías
- c) Calcular las funciones $(g \circ f)(x)$, $(h \circ f)(x)$
- d) Calcular las funciones $f^{-1}(x)$, $h^{-1}(x)$

Solución.

a) Dominios:

$$D\left[\sqrt{x^2 - 4}\right] = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \geq 0\}$$

$$x^2 - 4 \geq 0 : (x+2) \cdot (x-2) \geq 0$$

$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
-3	0	0	3	
- · - = +	↓	+ · - = -	↓	+ · + = +
	0		0	

$$D\left[\sqrt{x^2 - 4}\right] = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$D\left[\frac{x}{x^2 - 1}\right] = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \neq 0\} : x^2 - 1 \neq 0 : x^2 \neq 1 : x \neq \pm 1$$

$$D\left[\frac{x}{x^2 - 1}\right] = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$D[x^2 + x] = \mathbb{R} \text{ Por ser polinómica}$$

b) Simetría: De forma rigurosa hay que estudiar como se transforma la función cuando se cambia x por $-x$, pudiendo darse tres casos diferentes:

- $f(-x) = f(x)$. Función par. Simétrica respecto de OY
 - $f(-x) = -f(x)$. Función impar. Simétrica respecto de $(0, 0)$.
 - Ninguno de los anteriores. No tiene simetría.
- $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 4} = f(x)$: Simétrica PAR
- $g(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x}{x^2 - 1} = -\frac{x}{x^2 - 1} = -g(x)$: Simetría impar
- $h(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq \begin{cases} \neq h(x) \\ \neq -h(x) \end{cases} \Rightarrow$ No tiene simetría

Existe otra forma menos rigurosa que es un poco más sencilla. Se seleccionan dos valores $\pm a$ pertenecientes al dominio de la función y se calcula el valor de la función en ellos.

- $f(-a) = f(a)$. Función par. Simétrica respecto de OY
 - $f(-a) = -f(a)$. Función impar. Simétrica respecto de $(0, 0)$.
 - Ninguno de los anteriores. No tiene simetría.
- $\pm 3 \in D[f(x)]: \left\{ \begin{array}{l} f(-3) = \sqrt{(-3)^2 - 4} = \sqrt{5} \\ f(3) = \sqrt{3^2 - 4} = \sqrt{5} \end{array} \right\}: f(-3) = f(3)$. Simétrica PAR
- $\pm 2 \in D[g(x)]: \left\{ \begin{array}{l} g(-2) = \frac{-2}{(-2)^2 - 1} = \frac{-2}{3} \\ g(2) = \frac{2}{2^2 - 1} = \frac{2}{3} \end{array} \right\}: g(-2) = -g(2)$. Simetría impar
- $\pm 1 \in D[h(x)]: \left\{ \begin{array}{l} h(-1) = (-1)^2 + (-1) = 0 \\ h(1) = 1^2 + 1 = 2 \end{array} \right\}: h(-1) \neq \begin{cases} h(1) \\ -h(1) \end{cases}$. No tiene simetría

$$\text{c) } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)}{(f(x))^2 - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{(\sqrt{x^2 - 4})^2 - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 5}$$

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = (f(x))^2 + f(x) = (\sqrt{x^2 - 4})^2 + \sqrt{x^2 - 4} = x^2 - 4 + \sqrt{x^2 - 4}$$

d) $f^{-1}(x)$: Se intercambian y con x y se despeja y .

$$y = \sqrt{x^2 - 4} : x = \sqrt{y^2 - 4} : x^2 = y^2 - 4 : y^2 = x^2 + 4 : y = \sqrt{x^2 + 4}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 4}$$

$h^{-1}(x)$ No tiene inversa.

$$\text{10. Dadas las funciones } f(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} \quad h(x) = -x^2 + 4$$

Calcular:

- Sus dominios
- Simetrías
- Las funciones $[g \circ f](x)$, $[h \circ f](x)$
- Sus funciones inversas cuando existan

Solución.

$$\text{a) } -D\left[\sqrt{9 - x^2}\right] = \{x \in \mathbb{R} / 9 - x^2 \geq 0\}$$

$$3^2 - x^2 \geq 0: (3+x) \cdot (3-x) \geq 0$$

(-∞, -3)	-3	(-3, 3)	3	(3, +∞)
-4	0	0	4	
- · + = -	↓	+ · + = +	↓	+ · - = -
	0		0	

$$D[\sqrt{9-x^2}] = [-3, 3]$$

$$- D\left[\frac{x^2}{x^2+1}\right] = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}; x^2 + 1 = 0: x^2 = -1: x \notin \mathbb{R}$$

$$D\left[\frac{x^2}{x^2+1}\right] = \mathbb{R}$$

$$- D[-x^2 + 4] = \mathbb{R}. \text{ Por ser polinómica.}$$

b) - $f(-x) = \sqrt{9 - (-x)^2} = \sqrt{9 - x^2} = f(x)$. Par. Simétrica respecto OX

- $g(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1} = g(x)$. Par. Simétrica respecto OX

- $h(-x) = -(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4$. Par. Simétrica respecto OX

c) - $[g \circ f](x) = g(f(x)) = \frac{(f(x))^2}{(f(x))^2 + 1} = \frac{(\sqrt{9-x^2})^2}{(\sqrt{9-x^2})^2 + 1} = \frac{9-x^2}{10-x^2}$

- $[h \circ f](x) = h(f(x)) = -(f(x))^2 + 4 = -(\sqrt{9-x^2})^2 + 4 = -(9-x^2) + 4 = x^2 - 5$

d) - $f^{-1}(x): x = \sqrt{9-y^2}: x^2 = 9-y^2: y^2 = 9-x^2: y = \sqrt{9-x^2}: f^{-1}(x) = \sqrt{9-x^2}$

- $g^{-1}(x): x = \frac{y^2}{y^2+1}: x \cdot (y^2+1) = y^2: xy^2 + x = y^2: x = y^2 - xy^2: y^2(1-x) = x$

$$y^2 = \frac{x}{1-x}: y = \sqrt{\frac{x}{1-x}}: g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

- $h^{-1}(x): x = -y^2 + 4: y^2 = 4-x: y = \sqrt{4-x}: h^{-1}(x) = \sqrt{4-x}$

11. Calcular el dominio, las simetrías y la composición en los dos sentidos de las funciones:

$$f(x) = \frac{x}{3x^2 - 3} \quad g(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$$

Solución.

Dominio:

$$- D\left[\frac{x}{3x^2 - 3}\right] = \{x \in \mathbb{R} / 3x^2 - 3 \neq 0\}; 3x^2 - 3 = 0: x = \pm 1: D\left[\frac{x}{3x^2 - 3}\right] = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$- D[\sqrt{x^2 + 2x}] = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x \geq 0\}$$

$$x^2 + 2x \geq 0 : x \cdot (x+2) \geq 0$$

$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
-3	-1	3		
$- \cdot - = +$	\downarrow	$- \cdot + = -$	\downarrow	$+ \cdot + = +$
	0		0	

$$D[\sqrt{x^2 + 2x}] = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$$

Simetría:

- $f(-x) = \frac{-x}{3(-x)^2 - 3} = \frac{-x}{3x^2 - 3} = -\frac{x}{3x^2 - 3} = -f(x)$. Impar. Simétrica respecto del origen de coordenadas.

$$-g(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 2(-x)} = \sqrt{x^2 - 2x} \neq \begin{cases} \neq g(x) \\ \neq -g(x) \end{cases}. \text{No tiene simetría.}$$

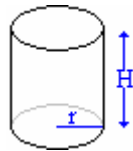
Composición:

$$-(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{3(g(x))^2 - 3} = \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{3(\sqrt{x^2 + 2x})^2 - 3} = \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{3x^2 + 6x - 3}$$

$$-(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{(f(x))^2 + 2f(x)} = \sqrt{\left(\frac{x}{3x^2 - 3}\right)^2 + 2\frac{x}{3x^2 - 3}} = \sqrt{\frac{x^2}{(3x^2 - 3)^2} + \frac{2x}{3x^2 - 3}} = \sqrt{\frac{x^2 + 2x \cdot (3x^2 - 3)}{(3x^2 - 3)^2}} = \frac{\sqrt{6x^3 + x^2 - 6x}}{3x^2 - 3}$$

12. Se quiere construir un cilindro de altura fija y de base variable. Dar una función que exprese el volumen del cilindro en función del radio.

Solución.



$$V = \pi r^2 H = \pi H r^2$$

13. Un globo se hincha mediante una maquina durante un minuto. El radio, r (cm) del globo varía con el tiempo de la siguiente forma:

$$r(t) = t \cdot (120 - t) \quad t(s)$$

Expresar:

- El volumen del gas contenido en el globo en función de r
- El volumen del gas contenido en el globo en función de t

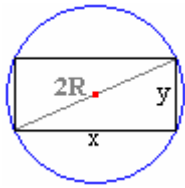
Solución.

a) $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

b) $V = \frac{4}{3} \pi r^3$
 $r = t \cdot (120 - t)$ } $V(t) = \frac{4}{3} \pi (t \cdot (120 - t))^3 = \frac{4}{3} \pi t^3 (120 - t)^3$

14. Expresar en función de la longitud de la base el área de un rectángulo inscrito en el mismo de radio R.

Solución.



El área de cualquier rectángulo es base \times altura. Aplicado al rectángulo de la figura:

$$A = x \cdot y$$

Si el rectángulo está inscrito en una circunferencia de radio R, sus dimensiones (x, y) están relacionados por el teorema de Pitágoras.

$$x^2 + y^2 = (2R)^2$$

Esta expresión permite expresar una variable en función de la otra.

$$y = \sqrt{4R^2 - x^2}$$

Sustituyendo en el área del rectángulo se obtiene una función que permite calcular el área de cualquier rectángulo inscrito en una circunferencia de radio R en función de la longitud de la base.

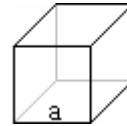
$$A = x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}$$

15. Expresar el volumen de un cubo en función del perímetro del mismo.

Solución.

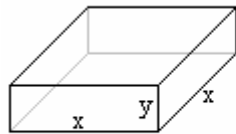
a = longitud de la arista. P = Perímetro V = Volumen

$$\left. \begin{array}{l} V = a^3 \\ P = 12a \end{array} \right\} : a = \frac{P}{12} : V = \left(\frac{P}{12}\right)^3 = \frac{1}{12^3} P^3$$

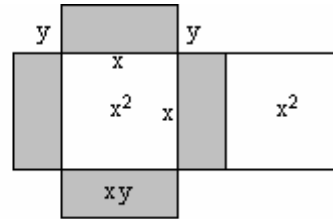


16. Expresar en función de la longitud de la base el volumen de una caja con tapa de base cuadrada, sabiendo que el área total vale S.

Solución.



$$V = x^2 y$$



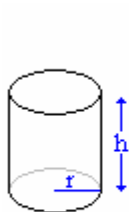
$$S = 2x^2 + 4xy$$

Conocida la superficie total del cubo se establece una relación entre x e y que permite expresar y en función de x

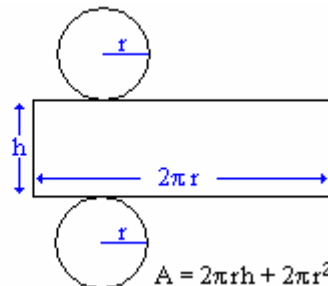
$$\left. \begin{array}{l} V = x^2 y \\ S = 2x^2 + 4xy \end{array} \right\} : y = \frac{S - 2x^2}{4x} : V = x^2 \cdot \frac{S - 2x^2}{4x} : V = \frac{1}{4} (Sx - 2x^3)$$

17. Expresar en función del radio el área total de un cilindro de volumen V.

Solución.



$$V = \pi r^2 h$$



$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

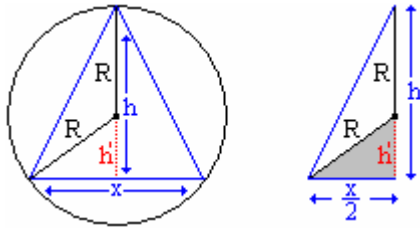
El área lateral de un cilindro es función de dos variables, el radio y la altura. Para poderlas relacionar se tiene en cuenta que el volumen del cilindro está fijado (es un dato), por lo tanto de la definición del volumen podemos obtener una relación entre la altura y el radio.

$$\left. \begin{array}{l} V = \pi r^2 h \\ A = 2\pi r h + 2\pi r^2 \end{array} \right\} : h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$A = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 : A = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

18. Hallar la función que expresa el área de un triángulo isósceles inscrito en un círculo de radio conocido R, en función de la longitud de la base.

Solución.



El área de un triángulo es:

$$A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

Si a la base se la denomina x, el problema está en expresar la altura (h) en función de x y del radio conocido R.

Según se observa en el dibujo $h = h' + R$.

h' se puede obtener mediante el teorema de Pitágoras en el triángulo sombreado en función de x y R.

$$h'^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = R^2 : h' = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$h = R + h' = R + \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$$

Sustituyendo en la expresión del área:

$$A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{x \cdot \left(R + \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} \right)}{2} = \frac{R \cdot x}{2} + x \cdot \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$$

Calcular el área lateral de un pozo de forma cilíndrica con fondo esférico y abierto superiormente en función del radio, teniendo en cuenta que el radio debe ser la décima parte de la profundidad máxima.

19. El elemento radio se descompone según la expresión:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-0'0004 \cdot t}$$

Donde N(t) es la cantidad en gramos de radio que queda sin descomponer en el instante t, t es el tiempo en años y N_0 es la cantidad inicial en gramos. Si se empieza con 50 gramos:

- ¿Cuántos gramos quedarán sin descomponer al cabo de 500 años?
- ¿Cuánto tiempo tardará en desaparecer el 99'99% de la muestra?
- ¿Cuál es la vida media del radio? Se define vida media como el tiempo necesario para que se descomponga la mitad de la muestra

Solución.

a. Se pide calcular el valor que toma la función para $t = 500$.

$$N(t) = 50 \cdot e^{-0'0004 \cdot t}$$

$$N(500) = 50 \cdot e^{-0'0004 \cdot 500} = 40,9\text{gr}$$

b. Si desaparece el 99,99% de la muestra, queda sin descomponer el 0,01% de la muestra inicial. Se pide calcular el tiempo necesario para que la muestra se reduzca hasta 0,01% de la cantidad inicial.

$$N(t) = \frac{0,01}{100} N_0 = 10^{-4} N_0$$

Sustituyendo en la expresión inicial $(N(t) = N_0 \cdot e^{-0'0004 \cdot t})$, se despeja t.

$$10^{-4} N_0 = N_0 \cdot e^{-0'0004 \cdot t} : 10^{-4} = e^{-0'0004 \cdot t} : \text{Ln}(10^{-4}) = \text{Ln} e^{-0'0004 \cdot t}$$

Para despejar t se toman logaritmos neperianos en ambos miembros.

$$-0'0004 \cdot t = \text{Ln} 10^{-4} : t = \frac{\text{Ln} 10^{-4}}{-0'0004} = 23025,8 \text{ años}$$

- c. Se pide calcular el tiempo necesario para que la muestra inicial se reduzca a la mitad.

$$N(t) = \frac{N_0}{2}$$

Sustituyendo en la expresión inicial $(N(t) = N_0 \cdot e^{-0'0004t})$, se despeja t.

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-0'0004t} \quad ; \quad \frac{1}{2} = e^{-0'0004t}$$

Para despejar t se toman logaritmos neperianos en ambos miembros.

$$\text{Ln} \frac{1}{2} = \text{Ln} e^{-0'0004t} \quad ; \quad -0'0004 \cdot t = \text{Ln} \frac{1}{2} \quad ; \quad t = \frac{\text{Ln} \frac{1}{2}}{-0'0004} = 1732 \text{ años}$$