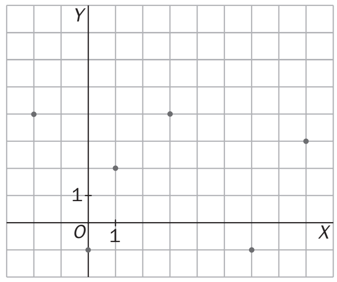
PARA EMPEZAR

1 **Clasifica los siguientes números: -2, 5, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{5}$, $-\sqrt{7}$, $-\frac{4}{3}$, 6, 250, 31, $2\sqrt{3}$.**

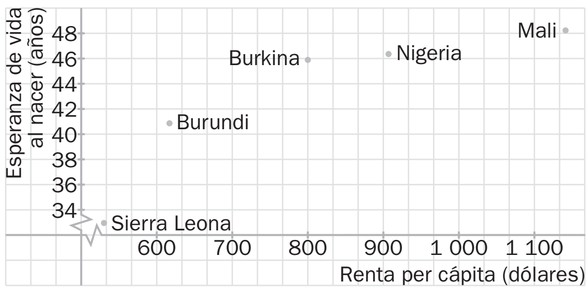
Números naturales: $N = \{5, 6, 250, 31\}$
Números enteros: $Z = \{-2\}$
Números racionales: $Q = \left\{\frac{1}{5}, -\frac{4}{3}\right\}$
Números irracionales: $I = \{\sqrt{3}, -\sqrt{7}, 2\sqrt{3}\}$

2 **Representa los valores de la tabla siguiente en unos ejes de coordenadas.**

x	−2	0	1	3	6	8
y	4	−1	2	4	−1	3



3 **El gráfico adjunto muestra la renta per capita, en dólares, y la esperanza de vida al nacer, en años, de los cinco países más pobres de África.**



a) ¿Cuál es el país con mayor esperanza de vida?

b) ¿Cuál es el país con mayor renta per capita?

c) Ordénalos de mayor a menor, según la renta per capita.

a) Mali con 48 años.

b) Mali.

c) Mali > Nigeria > Burkina > Burundi > Sierra Leona

VERIFICACIONES EN LOS EPÍGRAFES

Relaciones y funciones entre magnitudes

PARA PRACTICAR

12.1 **Escribe la expresión algebraica de las siguientes funciones.**

a) La que hace corresponder a cada número natural su siguiente.
b) La que hace corresponder a cada número natural su triple más dos.
c) La que hace corresponder a cada número racional su opuesto.
d) La que hace corresponder a cada número natural su siguiente número par.

a) $f(x) = x + 1$ $x =$ número natural. b) $f(x) = 3x + 2$ c) $f(x) = -x$ $x =$ número racional.

d) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si es par} \\ x + 1 & \text{si es impar} \end{cases}$ $x =$ número natural.

12.2 **De las tablas siguientes, ¿cuál no corresponde a una función?**

x	y
2	5
3	7
4	11
5	13

x	y
1	3
2	5
2	7
3	4

La tabla b no corresponde a una función porque al 2 le corresponden dos imágenes, el 5 y 7.

12.3 **En las siguientes relaciones, identifica las que son funciones.**
a) A cada número natural se le hace corresponder el doble.
b) A cada número real positivo se le hace corresponder su raíz cuadrada.
c) A cada número natural se le hace corresponder su divisor.

Es función la relación del apartado a.

Ejercicio resuelto

12.4 **Una función está dada por la expresión $y = 2x + 1$**
Identifica:
a) Las variables independiente y dependiente.
b) El dominio.
c) El recorrido o imagen.
e) La imagen de 15.

a) La variable independiente es la x, y la variable dependiente, la y.
b) El dominio es el conjunto de los números reales, porque las operaciones indicadas se pueden realizar con cualquier número.
c) El recorrido también es el conjunto de los números reales.
d) La imagen de 15 es $y = 2 \cdot 15 + 1 = 31$

12.5 **Una función está dada por la expresión $y = x + 5$.**
Calcula su dominio, su recorrido y la imagen de los números −2 y 0.

El dominio es el conjunto de los números reales porque las operaciones indicadas se pueden realizar con cualquier número.
El recorrido también es el conjunto de los números reales.
La imagen de -2 es $y = 3$, y la de 0 es $y = 5$.

12.6 Una función asocia a cada número entero su triple.
a) Calcula la imagen de −2, 0 y 3.
b) ¿De qué número es imagen el 8?
c) Halla el dominio y el recorrido.

$f(x) = 3x$

a) $f(-2) = 3(-2) = -6$ $f(0) = 0$ $f(3) = 3 \cdot 3 = 9$

b) No existe número que tenga como imagen 8.

c) El dominio: los enteros. La imagen: el triple de cada entero.

PARA APLICAR

12.7 La siguiente tabla representa la velocidad de un automóvil que ha realizado un trayecto de 80 kilómetros en distintos puntos del mismo.

Distancia (km)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
Velocidad (km/h)	0	60	70	50	60	80	40	60	20

a) ¿Es una función?
b) Identifica las variables independiente y dependiente.
c) Indica el dominio y el recorrido.
d) ¿Cuál es la imagen de 40? ¿Qué significa?

a) Si es una función.

b) Variable independiente: la distancia recorrida. Variable dependiente: la velocidad.

c) El dominio: el intervalo [0, 80]; El recorrido: el intervalo [0, 120]

d) La imagen de 40 es 60. Cuando está en el km 40 del recorrido alcanza una velocidad de 60 km/h.

12.8 Los alumnos de un centro escolar han organizado una serie de actos en una fiesta. La afluencia de personas ha sido muy variada según la hora del día. La tabla adjunta muestra esta situación.

Hora del día	10	12	14	16	18	20	22
N.° de personas	150	250	150	100	250	400	300

a) ¿Es una función?
b) Señala las variables.
c) ¿Cuál es el dominio y el recorrido?
d) ¿Cuántas personas había a las 12 horas?
e) ¿A qué hora había 400 personas?

a) Sí, es una función natural de variable real.

b) Variable independiente: hora del día. Variable dependiente: número de personas que asisten.

c) El dominio: los reales entre 10 y 22. El recorrido: los naturales en el intervalo [100, 400]

d) A las 12 horas había 250 personas.

e) Había 400 personas a las 20 horas.

Gráficas, tablas y fórmulas

PARA PRACTICAR

Ejercicio resuelto

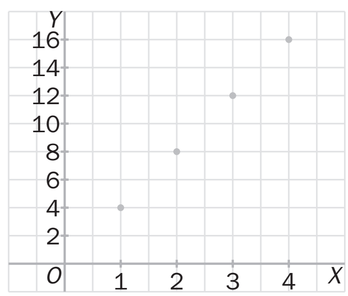
12.9 Una función asocia a cada número natural su cuádruple.
a) Escribe su expresión algebraica.
b) Forma una tabla de valores.
c) Representa gráficamente la función.

a) $y = 4x$

b)

x	1	2	3	4	…
y	4	8	12	16	…

c)



Los puntos no se pueden unir, ya que la variable independiente x es siempre un número natural.

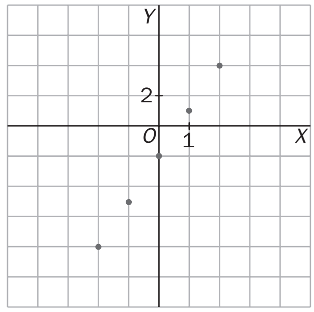
12.10 Una función asocia a cada número entero su triple menos dos:
a) Escribe su expresión algebraica.
b) Forma una tabla de valores.
c) Representa gráficamente la función.
d) ¿Se pueden unir los puntos obtenidos a partir de los valores de la tabla?

a) $f(x) = 3x - 2$

b)

x	-2	-1	0	1	2	...
y	-8	-5	-2	1	4	...

c)



d) No se pueden unir porque el dominio y el recorrido son enteros.

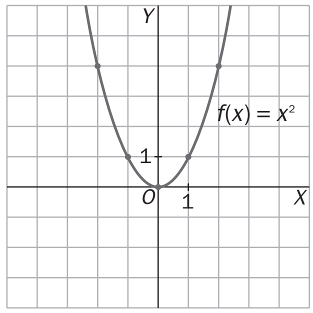
12.11 Una función asocia a cada número real su cuadrado.
a) Escribe su expresión algebraica.
b) Forma una tabla de valores.
c) Representa gráficamente la función.
d) ¿Se pueden unir los puntos obtenidos a partir de los valores de la tabla?

a) $f(x) = x^2$

b)

x	-2	-1	0	1	2	...
y	4	1	0	1	4	...

c)



d) Si se pueden unir porque el dominio y el recorrido son reales.

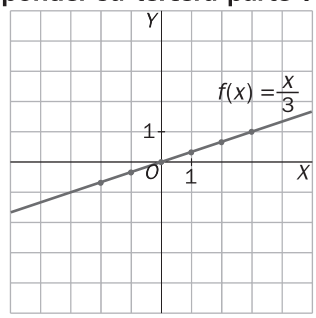
12.12 Se define una función del siguiente modo: "A cada número real se le hace corresponder su tercera parte".
a) Escribe su expresión algebraica.
b) Forma una tabla de valores.
c) Representa gráficamente la función.

a) $f(x) = \frac{x}{3}$

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	...
y	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	...

c)



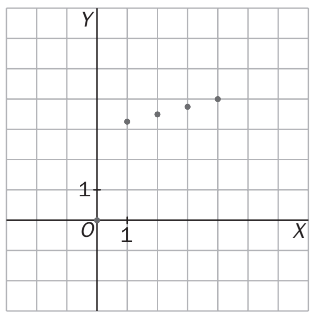
PARA APLICAR

12.13 Un servicio de fotografía digital cobra 3 euros por el revelado de una tarjeta de memoria más 0,25 euros por cada fotografía.
a) Forma una tabla de valores.
b) Representa gráficamente la función.
c) ¿Tiene sentido unir los puntos obtenidos a partir de los valores de la tabla?

a) $f(x) = 0{,}25x + 3$

x	$y = f(x)$
1	3,25
2	3,5
3	3,75
4	4

b)

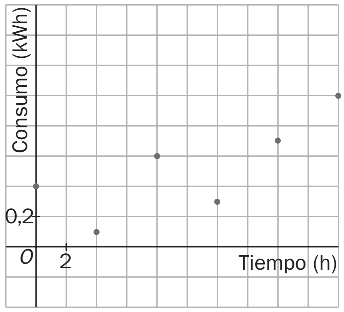


c) No tiene sentido.

12.14 **El consumo de electricidad de una vivienda a distintas horas del día viene reflejado por la siguiente tabla:**

Tiempo (h)	0	4	8	12	16	20
Consumo (kWh)	0,4	0,1	0,6	0,3	0,7	1

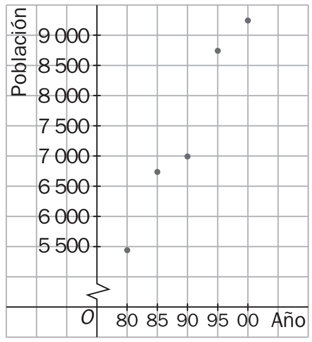
Representa la gráfica de la función asociada a la tabla.



12.15 **La evolución de una población ha sido la siguiente:**

Año	1980	1985	1990	1995	2000
Población	5 450	6 750	7 000	8 750	9 250

Representa la gráfica de la función asociada a la tabla.



12.16 **Un Ayuntamiento está realizando una campaña para ahorrar agua y gracias a ella se han obtenido las siguientes reducciones de consumo en 8 meses:**

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8
Reducción consumo en dam^3	60	70	75	77	80	82	83	85

a) Representa la función que expresa la reducción de consumo de agua en decámetros cúbicos, en función de los meses de la campaña.

b) ¿Se pueden unir los puntos obtenidos a partir de la tabla de valores?

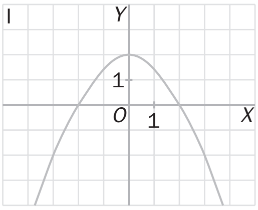
a)

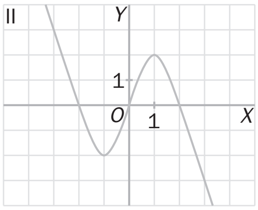
b) Sí, se pueden unir porque tienen sentido los puntos intermedios.

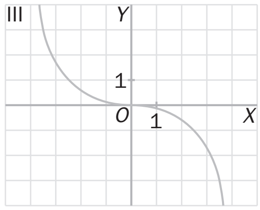
Simetrías y periodicidad

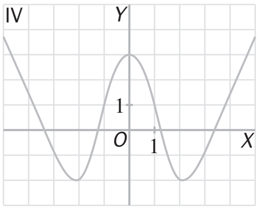
P A R A   P R A C T I C A R

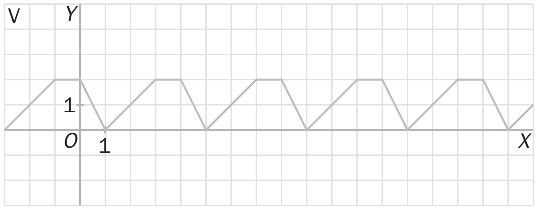
12.17 **Dadas las siguientes funciones mediante sus gráficas:**











a) Indica cuáles son simétricas respecto al eje *OY*.
b) Indica cuáles son simétricas respecto del origen.
c) Indica cuáles son periódicas.

a) Simétricas respecto al eje de ordenadas: I, IV.
b) Simétricas respecto del origen: II, III.
c) Periódicas: V.

Ejercicio resuelto

12.18 **Dadas las siguientes funciones:**

a) $y = 2x + 3$ **b)** $y = -2x^2$ **c)** $y = 4x^3$

Estudia su simetría.

a) $\left.\begin{array}{l} f(x) = 2x + 3 \\ f(-x) = -2x + 3 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} f(x) \neq f(-x) \\ f(x) \neq -f(x) \end{array}$

La función no es simétrica respecto del eje de ordenadas ni respecto del origen.

b) $\left.\begin{array}{l} f(x) = -2x^2 \\ f(-x) = -2(-x)^2 \end{array}\right. \Rightarrow f(x) = f(-x)$

La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.

c) $\left.\begin{array}{l} f(x) = 4x^3 \\ f(-x) = 4(-x)^3 = -4x^3 \end{array}\right. \Rightarrow f(x) = -f(-x)$

La función es simétrica respecto del origen.

12.19 Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $y = 4$ b) $y = -\frac{2}{3}x^4$ c) $y = x$

a) $y = 4$ Simétrica respecto del eje de ordenadas. $f(x) = f(-x)$

x	-2	-1	0	1
y	4	4	4	4

b) $y = -\frac{2}{3}x^4$ Simétrica respecto del eje de ordenadas. $f(x) = f(-x)$

x	-2	-1	0	-2
y	$-\frac{2}{3} \cdot 16$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3} \cdot 16$

c) $y = x$ Simétrica respecto del origen.

x	-2	-1	0	1
y	-2	-1	0	1

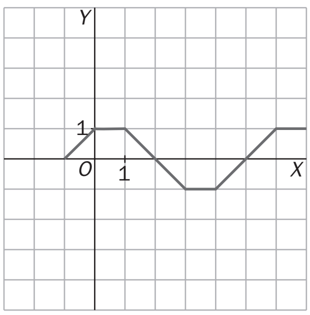
12.20 Realiza una gráfica de una función:

a) Periódica.

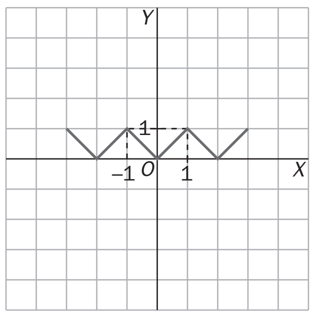
b) Periódica y simétrica respecto del eje de ordenadas.

c) Periódica y simétrica respecto del origen.

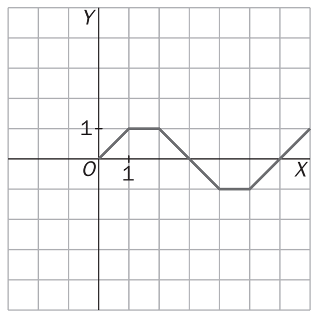
a)



b)



c)



PARA APLICAR

12.21 Considera la función que hace corresponder a cada radio el área del círculo.

a) Escribe su expresión algebraica.

b) Representa gráficamente la función.

c) ¿Es simétrica respecto del eje de ordenadas?

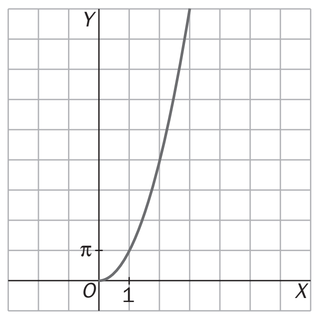
d) ¿Es simétrica respecto del origen?

e) ¿Es periódica?

a) $f(r) = \pi r^2$

b)

x	y
1	π
2	4π
3	9π

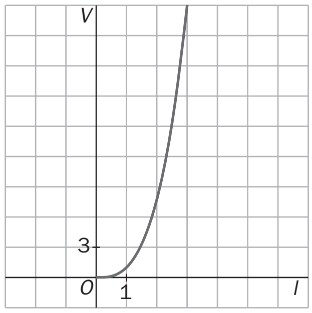


c) No, no tiene sentido un círculo de radio negativo.

d) No, por la razón anterior.

e) No, porque no se repite.

12.22 Considera la función que asocia a cada arista de un cubo su volumen.
a) Forma su expresión algebraica.
b) Representa la función.
c) ¿Es simétrica respecto del origen?



a) $V = l^3$

b)

l	1	−1	2
V	1	−1	8

c) No, ya que no tienen sentido una arista o un volumen negativo.

12.23 Considera la función que asocia a cada lado de un triángulo equilátero su perímetro. ¿Es simétrica? ¿Y la función que asocia a cada lado de un triángulo equilátero su área?

x = lado del triángulo equilátero $\Rightarrow$ $f(x) = 3x$

x	1	2	3	...
y	3	6	9	...

No es simétrica, no tiene sentido triángulos de lado negativo.

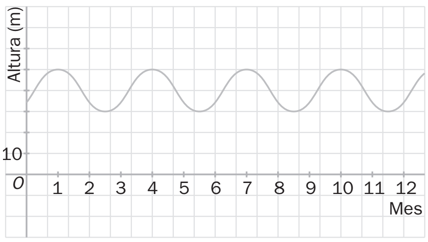
$h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4}$; $h = \frac{x}{2}\sqrt{3}$ $A(x) = x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$

No, el lado del triángulo no puede ser negativo.

12.24 Las mareas son ascensos y descensos cíclicos del nivel del mar, causados por la rotación de la Tierra y la atracción gravitatoria de la Luna y el Sol. Una persona ha estado anotando la altura que alcanza el agua en el puerto todos los días a la misma hora y ha obtenido la siguiente gráfica.
a) ¿Es esta una función periódica?
b) ¿Se pueden unir los puntos obtenidos?

a) Si es periódica, la altura es la misma cada ciertas horas.

b) Sí

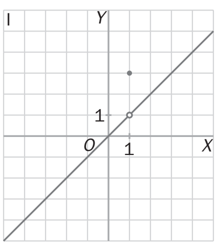


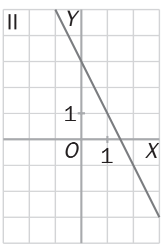
Continuidad y discontinuidad. Tasa de variación

PARA PRACTICAR

Ejercicio resuelto

12.25 Indica cuáles de las siguientes funciones dadas por sus gráficas son continuas. En caso contrario, identifica los puntos de discontinuidad.

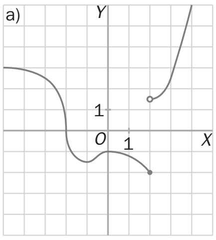


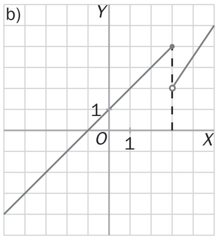


a) En este caso, la función es continua en todo el intervalo de definición (el conjunto R de los números reales) excepto en el punto $x = 1$.

b) La función es discontinua en todos los puntos donde está definida.

12.26 Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

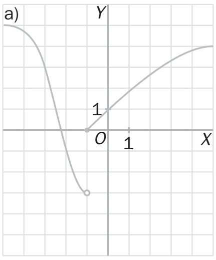


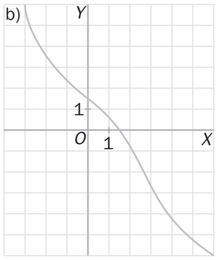


a) La función es continua en todo el intervalo de definición (el conjunto *R* de los números reales) excepto en el punto $x = 2$.

b) La función es continua en todo el intervalo de definición (el conjunto *R* de los números reales) excepto en el punto $x = 3$.

12.27 ¿Cuáles de las siguientes funciones dadas por sus gráficas son continuas? Indica los puntos de discontinuidad de las que no lo son.





a) La función es continua en todo el intervalo de definición (el conjunto *R* de los números reales) excepto en el punto $x = -1$.

b) La función es continua en todo el intervalo de definición (el conjunto *R* de los números reales).

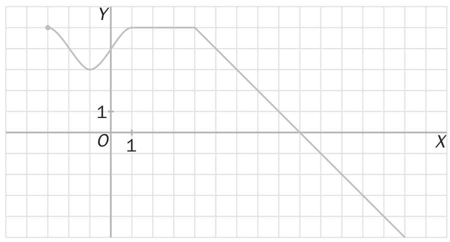
12.28 Halla la tasa de variación de la función $y = -3x^2 - 5$ en el intervalo $[-2, -1]$.

$f(-2) = -3(-2)^2 - 5 = -12 - 5 = -17$

$f(-1) = -3(-1)^2 - 5 = -3 - 5 = -8$

Tasa de variación: $[-2, -1] = f(-1) - f(-2) = -8 - (-17) = 9$

12.29 Una función viene dada por la siguiente gráfica:
Halla su tasa de variación en los intervalos:



a) $x = -3$ y $x = -2$
b) $x = -2$ y $x = -1$
c) $x = 0$ y $x = 1$
d) $x = 2$ y $x = 3$

a) $f(-2) - f(-3) = 4 - 5 = -1$

b) $f(-1) - f(-2) = 3 - 4 = -1$

c) $f(1) - f(0) = 5 - 4 = 1$

d) $f(3) - f(2) = 5 - 5 = 0$

PARA APLICAR

12.30 Considera la función que asocia a cada lado de un cuadrado su perímetro. ¿Es continua o discontinua?

x = lado del cuadrado.

$P(x) = 4x$

Es continua, ya que a cualquier pequeña variación del lado del cuadrado le corresponde una pequeña variación del perímetro. Su gráfica no presenta saltos ni interrupciones.

12.31 Indica si la función que hace corresponder a cada radio de una circunferencia la longitud de la misma es continua o discontinua.

x = radio de la circunferencia

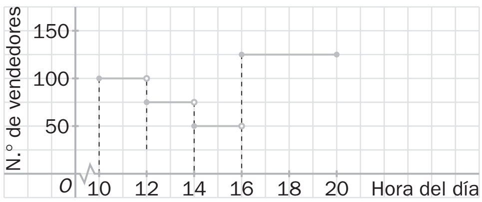
$L(x) = 2\pi x$

Es continua, ya que a cualquier pequeña variación del radio le corresponde una pequeña variación de *L* longitud de la circunferencia. Su gráfica no presenta saltos ni interrupciones.

12.32 Para la función del ejercicio anterior, halla la tasa de variación cuando el radio pasa de $r = 2$ centímetros y $r = 2{,}1$ centímetros.

$L(2) = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$ $\quad$ $L(2{,}1) = 4{,}2\pi$ $\quad$ $L(2{,}1) - L(2) = 4{,}2\pi - 4\pi = 0{,}2\pi$

12.33 La gráfica expresa el número de vendedores que tiene un gran almacén en las distintas horas del día. Indica si es continua o no, y señala en su caso los puntos de discontinuidad.



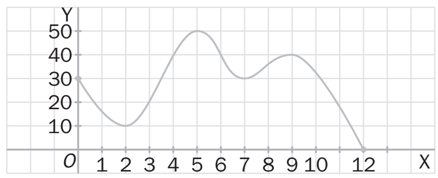
No es continua.
Puntos de discontinuidad:12 h, 14 h y 16 h.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

PARA PRACTICAR

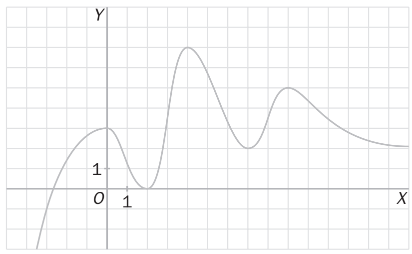
Ejercicio resuelto

12.34 Una función viene dada por la siguiente gráfica:
a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) Halla los máximos absolutos y relativos.
c) Halla los mínimos absolutos y relativos.



a) La función es decreciente entre $x = 0$ y $x = 2$; entre $x = 5$ y $x = 7$ y entre $x = 9$ y $x = 12$.
La función es creciente entre $x = 2$ y $x = 5$; entre $x = 7$ y $x = 9$.
b) La función tiene su máximo absoluto en $x = 5$ y un máximo relativo en $x = 9$.
c) La función tiene su mínimo absoluto en $x = 12$ y dos mínimos relativos en $x = 2$ y en $x = 7$.

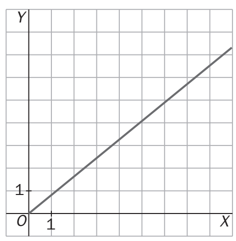
12.35 Una función viene dada por la siguiente gráfica:
a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) Halla los máximos e indica cuál es el absoluto.
c) Halla los mínimos e indica cuál es el absoluto.



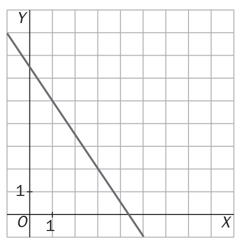
a) La función es decreciente entre $x = 0$ y $x = 2$; entre $x = 4$ y $x = 7$ y entre $x = 9$ y $x = 15$.
La función es creciente entre $x = -3{,}5$ y $x = 0$; entre $x = 2$ y $x = 4$ y entre $x = 7$ y $x = 9$.
b) La función tiene su máximo absoluto en (4, 7) y máximos relativos en (0, 3) y (9, 5).
c) La función tiene su mínimo absoluto en (−3,5, −3) y dos mínimos relativos en (7, 2) y en (2, 0).

12.36 Representa, en cada caso una función que tenga las siguientes características:
a) Continua y siempre creciente. **b) Continua y siempre decreciente.**

a)



b)



12.37 ¿Puede una función ser continua y ni creciente ni decreciente? Pon un ejemplo.

Si. Una función constante. Por ejemplo: $f(x) = 5$

P A R A   A P L I C A R

12.38 Estudia el crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones.

a) Función que hace corresponder a cada número su triple más 100.

b) Función que hace corresponder a cada número 100 menos el triple del número.

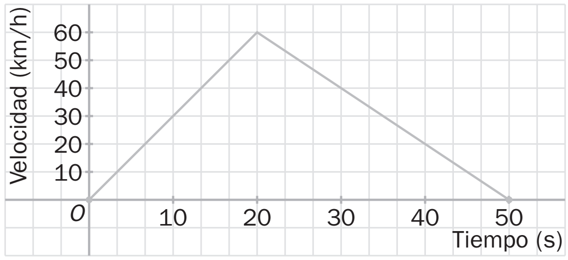
a) $f(x) = 3x + 100 \Rightarrow$ Se trata de una función lineal de pendiente positiva y por lo tanto, creciente.

b) $f(x) = 100 - 3x \Rightarrow$ Este caso se trata de una función lineal de pendiente negativa y por lo tanto, decreciente.

12.39 La siguiente función muestra la variación de la velocidad de un coche a lo largo de un período de tiempo.

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función.

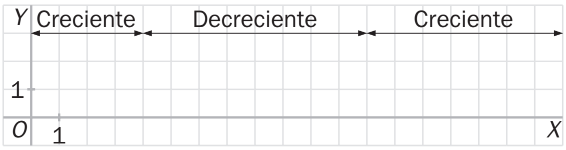
b) Indica cuando acelera (aumento de velocidad) y cuando frena (disminución de velocidad).

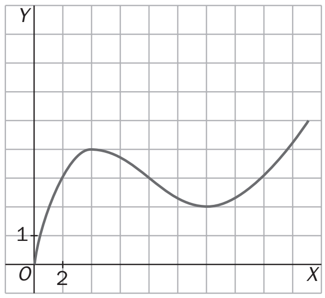


a) La función es creciente entre $x = 0$ y $x = 20$; La función es decreciente entre $x = 20$ y $x = 50$.

b) El coche acelera cuando la función crece y frena cuando la función decrece.

12.40 Dibuja la gráfica de una función que esté de acuerdo con los datos siguientes.

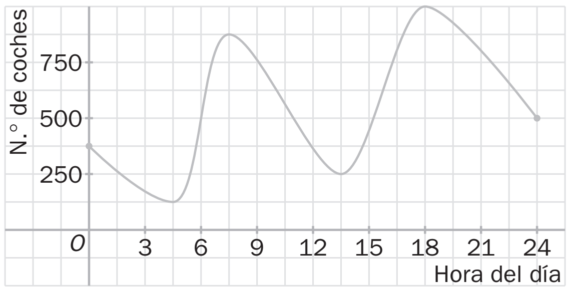




12.41 La siguiente gráfica muestra el número de coches que pasa por un punto kilométrico de una autopista a lo largo de un día.

a) Estudia su crecimiento y decrecimiento.

b) Indica en qué puntos la función alcanza su máximo y su mínimo absolutos.



a) La función es creciente entre las horas $x = 4$ h. 30 min. y $x = 7$ h. 30 min. y entre $x = 13$ h. 30 min. y $x = 18$ h. La función es decreciente entre $x = 0$ h. y $x = 4$ h. 30 min.; entre $x = 7$ h. 30 min. y $x = 13$ h. 30 min. y entre $x = 18$ h. y $x = 24$ h.

b) La función alcanza su máximo absoluto a las 18 h. que hay 1 000 coches y alcanza su mínimo absoluto a las 4 h. 30 min. que hay un número inferior a 250 coches.

Matemáticas aplicadas

PARA APLICAR

12.42 **Halla el ángulo de visión y la distancia de frenada de un coche para las siguientes velocidades.**

a) 40 km/h **b) 70 km/h** **c) 100 km/h** **d) 130 km/h**

a) Ángulo de visión: 100°; Distancia frenado: 25 metros.
b) Ángulo de visión: 87,5°; Distancia frenado: 62,5 metros.
c) Ángulo de visión: 45°; Distancia frenado: 125 metros.
d) Ángulo de visión: 20°; Distancia frenado: 200 metros.

12.43 **Halla la velocidad de un coche si su conductor tiene estos ángulos de visión.**

a) 75° **b) 100°** **c) 50°** **d) 30°**

a) 80 km/h b) 45 km/h c) 95 km/h d) 110 km/h

12.44 **Halla la velocidad de un coche si para detenerse necesita las siguientes distancias.**

a) 50 metros **b) 100 metros** **c) 150 metros** **d) 200 metros**

a) 60 km/h b) 85 km/h c) 110 km/h d) 130 km/h

Actividades finales

PARA PRACTICAR Y APLICAR

12.45 Las siguientes tablas representan la relación entre dos magnitudes.

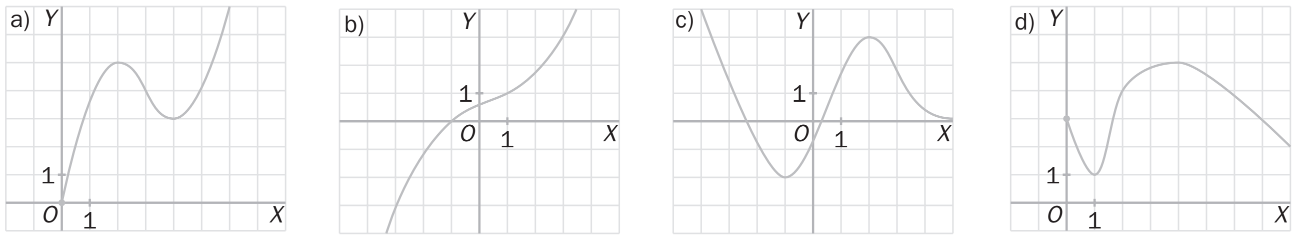
x	*y*
0	0
2	5
4	3
5	4

x	*y*
0	3
1	1
2	4
4	5

x	*y*
−4	4
−1	−2
2	3
3	2

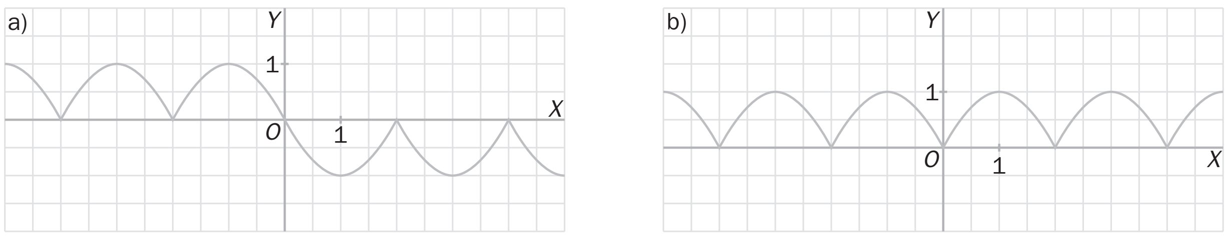
x	*y*
−2	−1
−1	0
1	1
3	3

Relaciona cada tabla con las siguientes gráficas.



La primera tabla con la gráfica a.
La segunda tabla con la gráfica d.
La tercera tabla con la gráfica c.
La cuarta tabla con la gráfica b.

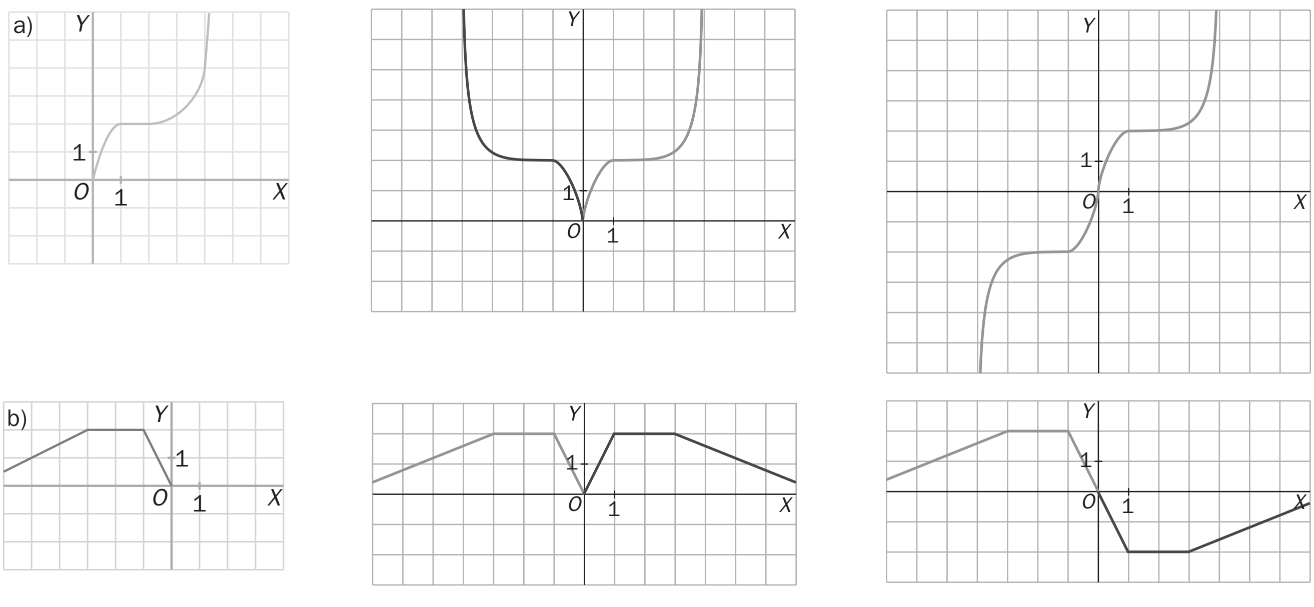
12.46 Estudia la simetría y la periodicidad de las siguientes funciones.



a) Simétrica respecto al origen y no periódica.

b) Periódica y simétrica respecto al eje *OY*.

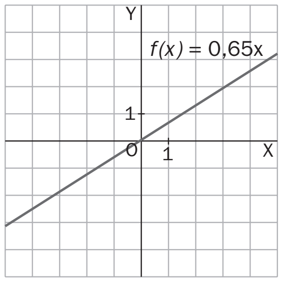
12.47 Completa las gráficas de las siguientes funciones para que sean simétricas respecto al origen y al eje *OY*.



12.48 Cada kilo de harina cuesta 0,65 euros. Expresa la relación entre las magnitudes, número de kilos de harina y coste mediante una tabla, una gráfica y una fórmula, identificando las variables independiente y dependiente.

x = número de kilos de harina
Variable independiente.
$f(x) = 0{,}65x$.
$f(x)$ = Coste, variable dependiente.

x	y
1	0,65
2	1,30
3	1,95



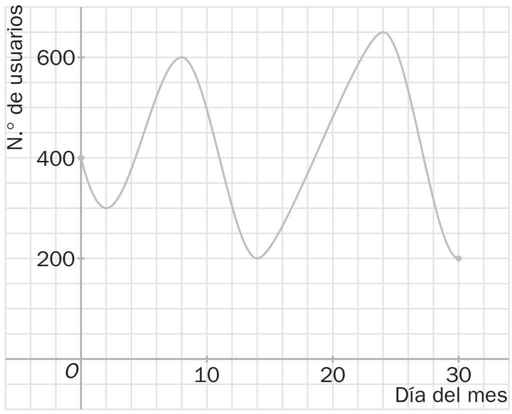
12.49 La función g asocia a cada número su doble.
a) Escribe su dominio y su recorrido. **b) Halla el valor de $g(2)$, $g(0)$, $g(-3)$ y $g(10)$.**

$g(x) = 2x$

a) Dominio de la función = conjunto de los números reales.
Recorrido de la función = conjunto de los números reales.

b) $g(2) = 4$; $g(0) = 0$; $g(-3) = -6$; $g(10) = 20$

12.50 La gráfica muestra el número de usuarios de una línea telefónica "a tres" a lo largo de un mes.
a) Estudia su crecimiento y su decrecimiento.
b) Halla sus máximos y mínimos.
c) ¿Es continua?

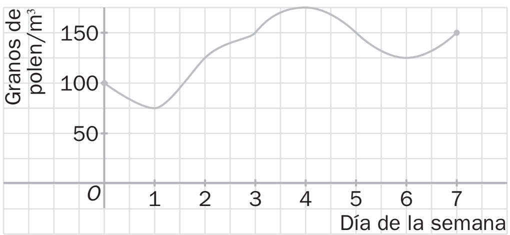


a) La función es creciente entre los días $x = 2$ y $x = 8$ y entre $x = 14$ y $x = 24$.
La función es decreciente entre los días $x = 0$ y $x = 2$; entre $x = 8$ y $x = 14$ y entre $x = 24$ y $x = 30$.

b) La función tiene un máximo absoluto el día 24 que hay 650 usuarios y un máximo relativo el día 9 que hay 600 usuarios.
La función tiene un mínimo absoluto el día 14 que sólo la utilizan 200 usuarios y un mínimo relativo el día 2 con 300 usuarios.

c) Sí, en su dominio.

12.51 Durante la primavera, los servicios de urgencias de los hospitales tienen que estar alerta ante los posibles casos de alergia. La gráfica muestra el nivel de polen durante la última semana.
a) ¿Qué día se produjo un mayor nivel de polen?

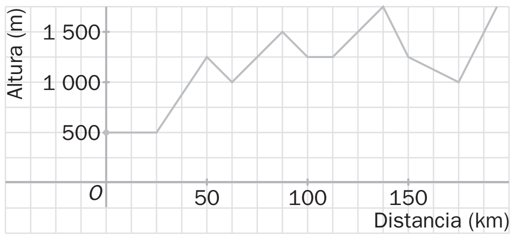


b) ¿Cómo se prevé que estarán las urgencias los primeros días de la siguiente semana?

a) A media noche del día 3 se produjo el mayor nivel de polen.

b) Saturadas ya que la función empieza a ser creciente el día 6.

12.52 El perfil de una etapa ciclista es el siguiente.

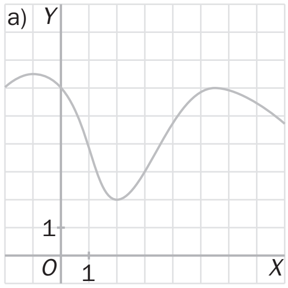


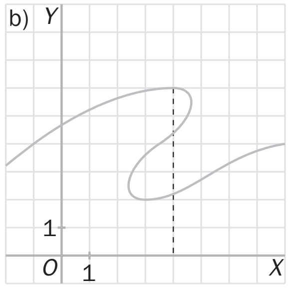
Describe detalladamente la gráfica de la función.

La función tiene tramos de subida, bajada y llano; tiene subidas entre las distancias $x = 25$ y $x = 50$; entre $x = 62{,}5$ y $x = 87{,}5$; entre $x = 112{,}5$ y $x = 137{,}5$ y a partir de $x = 175$ km. Tiene descensos entre $x = 50$; $x = 62{,}5$; entre $x = 87{,}5$ y $x = 100$; entre $x = 137{,}5$ y $x = 175$. Los tramos llanos son entre $x = 0$ y $x = 25$; entre $x = 100$ y $x = 112{,}5$.
También en el descenso entre $x = 137{,}5$ y $x = 175$; primero hay un descenso más fuerte hasta x =150 y luego el descenso es más lento.

PARA REFORZAR

12.53 Indica cuál de las dos gráficas representa una función razonando tu respuesta.



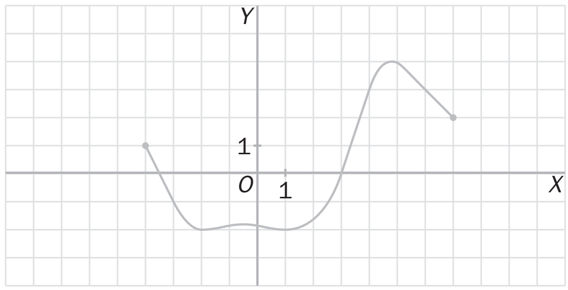


La gráfica a) representa una gráfica, ya que en la b) para $x = 4$, $f(4)$ puede tomar tres valores diferentes.

12.54 La siguiente gráfica representa la relación entre dos magnitudes.

a) Halla el dominio y el recorrido.

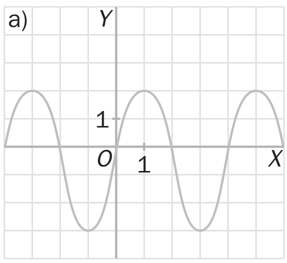
b) ¿Es continua?

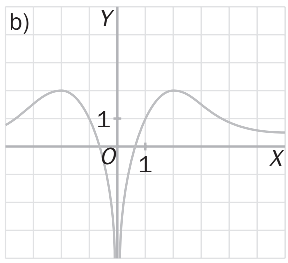


a) Dominio: $[-4, 7]$; Recorrido: $[-2, 4]$.

b) Es continua en su dominio.

12.55 En cada caso, indica si la función representada es periódica, simétrica respecto al origen o simétrica respecto al eje *OY*.





a) Periódica.

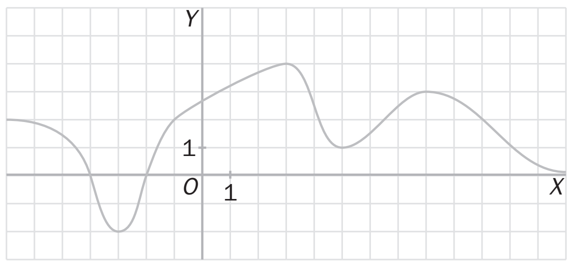
b) Simétrica respecto eje *OY*

12.56 Una función viene dada por la siguiente gráfica.

a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Halla los máximos e indica cuál es el absoluto.

c) Halla los mínimos e indica cuál es el absoluto.



a) La función es creciente entre $x = -3$ y $x = 3$; entre $x = 5$ y $x = 8$. La función es decreciente entre $x = -7$ y $x = -3$; entre $x = 3$ y $x = 5$; entre $x = 8$ y $x = 13$.

b) y c) Tiene un mínimo relativo en $x = 5$ e $y = 1$ y su mínimo absoluto en $x = -3$ e $y = -2$. Tiene un máximo relativo en $x = 8$ e $y = 3$ y su máximo absoluto en $x = 3$ e $y = 4$.

PARA AMPLIAR

12.57 La función $y = E[x]$ asocia a cada número real su anterior entero y se lee "parte entera de x".

a) Halla $E[1{,}3]$; $E[1{,}9]$; $E[2]$.

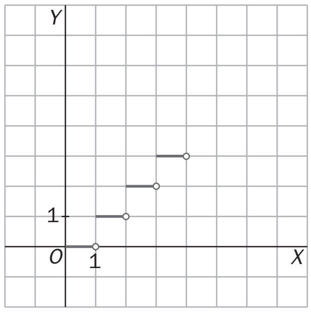
b) Representa gráficamente la función.

c) Estudia la continuidad, indicando los puntos en que la función es discontinua.

$y = E[x]$

a) $E[1{,}3] = 1$; $E[1{,}9] = 1$; $E[2] = 2$

b)



c) La función es discontinua en los números enteros.

12.58 Se tienen 2000 metros de valla para hacer un cercado con el fin de guardar una especie protegida. El cercado ha de tener forma rectangular.

a) Escribe la función que proporciona el área del rectángulo teniendo en cuenta que su perímetro ha de tener 2000 metros.

b) Forma una tabla de valores posibles de largo y ancho que den el mismo perímetro.

c) ¿Qué medidas deberá tener el cercado para que el área sea máxima?

a) $P = 2\,000$ m   Perímetro $= 2x + 2y$

$2\,000 = 2(x + y)$; $1\,000 = x + y \Rightarrow y = 1\,000 - x$

Luego el área será: $A = x(1\,000 - x)$ $A = 1\,000x - x^2$

b)

x	100	200	300	400	500
y	900	800	700	600	500
Área	90 000	160 000	210 000	240 000	250 000

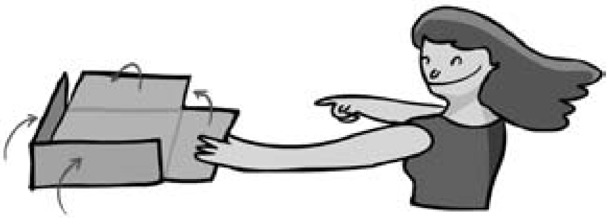
c) El área es máxima cuando es un cuadrado de lado $x = 500$ m.

12.59 Con un folio de cartulina de dimensiones 30 por 21 centímetros se quiere construir una caja sin tapa cortando cuatro cuadrados en las esquinas y doblando como indica la figura.

a) Halla la función que expresa el volumen de la caja en función del lado del cuadrado cortado.

b) Completa la tabla de valores siguiente.

x **(cm)**	**3**	**3,5**	**4**	**4,5**	**5**
Volumen (m^3)					



c) ¿Cuánto debe medir el lado del cuadrado para que el volumen de la caja sea máximo?

a) $V(x) = x(30 - x)(21 - x) = x^3 - 51x^2 + 630x$

b)

x **(cm)**	3	3,5	4	4,5	5
Volumen (m^3)	1 458	1 623,125	1 768	1 893,375	2 000

c) El lado del cuadrado ha de medir 5 cm.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

12.60 Cultivo de bacterias

Se han preparado dos cultivos de bacterias del mismo tipo. El segundo cultivo empieza su evolución un día después de haber comenzado el primero, pero con las mismas condiciones: igual número inicial de bacterias, igual tipo de crecimiento, etcétera.

La siguiente gráfica representa el número de bacterias del primer cultivo entre los días 1 y 12 de junio.

a) Describe detalladamente lo que está ocurriendo en cada tramo de la gráfica.

b) Elabora la gráfica que representa la evolución del segundo cultivo en el mismo período de tiempo.

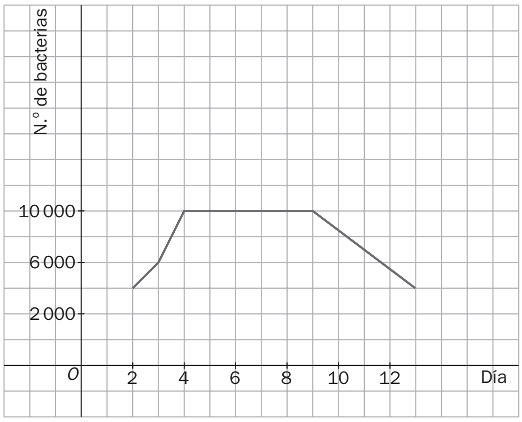
a) Tramo 1: Reproduce un crecimiento constante de bacterias de 4000 a 6000 durante un día.

Tramo 2: Del 2 al 3 de junio se produce un crecimiento constante de 6000 a 10000 bacterias.

Tramo 3: Del 3 al 8 de junio, no se experimenta crecimiento y la cantidad de 10000 bacterias permanece constante.

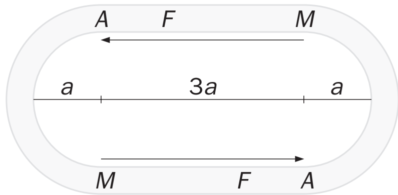
Tramo 4: Hay una disminución constante hasta 4000 bacterias, durante los cuatro días siguientes.

b)



12.61 El circuito

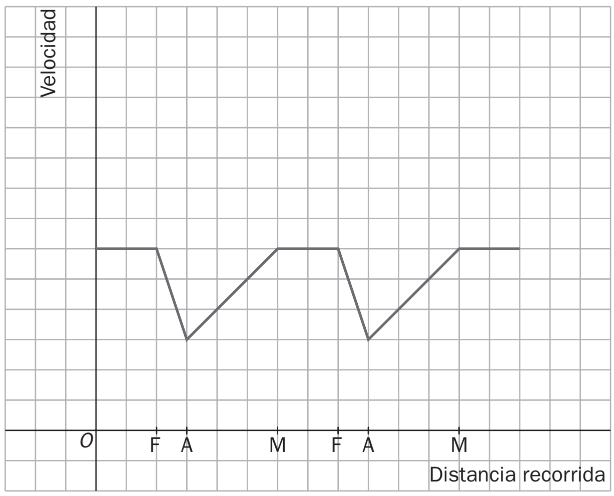
El gran premio de automovilismo de la ciudad de Speedtown se celebra en el siguiente circuito.



El automovilista Johnny Fast realiza las sucesivas vueltas al circuito siempre de la misma forma.

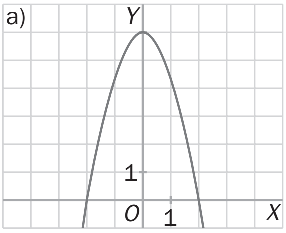
- **Cuando llega a los puntos *F* frena y disminuye paulatinamente la velocidad para entrar en la curva sin peligro.**
- **Cuando llega a los puntos *A* acelera de forma constante para ganar velocidad.**
- **Cuando llega a los puntos *M* deja de acelerar para mantener la velocidad alcanzada.**

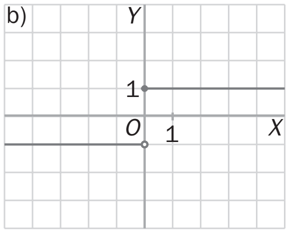
Elabora una gráfica que refleje de forma cualitativa la variación de la velocidad en función de la distancia durante una vuelta, marcando los puntos principales del eje horizontal.



AUTOEVALUACIÓN

12.A1 Estudia el dominio, el recorrido y la continuidad.





a) Dominio = conjunto números reales.
Recorrido = $(-\infty, 6]$
Continua en todo conjunto números reales.

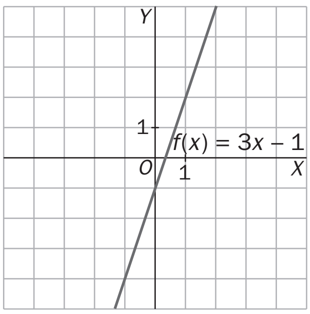
b) Dominio = conjunto números reales.
Recorrido = $\{-1, 1\}$
Discontinua en $x = 0$.

12.A2 Dada la función $f(x) = 3x - 1$.
a) Forma una tabla de valores.
b) Represéntala gráficamente.

a) $f(x) = 3x - 1$

x	-1	0	1
$f(x)$	-4	-1	2

b)



12.A3 Dadas las siguientes funciones estudia su simetría.
a) $y = 2(x - 1)^2 + 4x$ b) $y = 5(x - 1)^3$ c) $y = 2x$ d) $y = -7$

a) $y = 2(x - 1)^2 + 4x$ No es simétrica.
b) $y = 5(x - 1)^3$ No es simétrica.
c) $y = 2x$ Es simétrica respecto el origen.
d) $y = -7$ Es simétrica respecto al eje OY.

12.A4 Dada la función $f(x) = 3(x - 2)^2 + 1$, halla su tasa de variación entre $x = 2$ y $x = 2,3$.

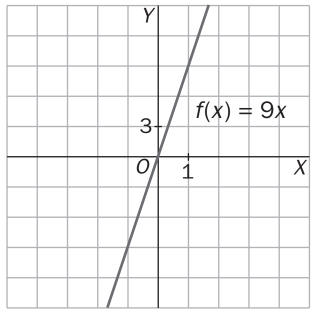
$f(2,3) = 3(2,3 - 2)^2 + 1 = 1,27$ $\qquad$ $f(2) = 3(2 - 2)^2 + 1 = 1$

Tasa de variación: $[2, 2,3] = f(2, 3) - f(2) = 1,27 - 1 = 0,27$

12.A5 Una tienda de discos ofrece la siguiente promoción: "Todos los discos a 9 € cada uno".

a) Representa la función que relaciona los discos comprados y su precio.

b) ¿Es continua?



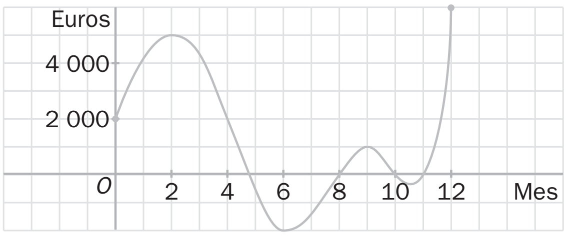
a) Sea x el número de discos comprados, e y el importe en euros.
La función que relaciona ambas variables es: $y = 9x$

b) No es continua en R.

12.A6 La siguiente gráfica muestra las ganancias o pérdidas de una empresa a lo largo del último año.

a) ¿En qué períodos se producen pérdidas?

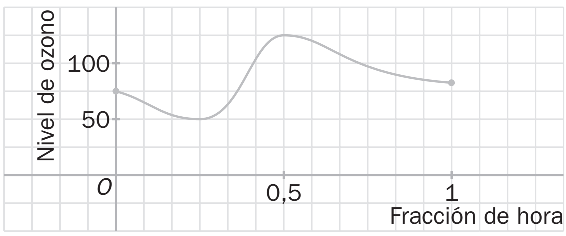
b) ¿En qué momento se consigue el mayor beneficio? ¿Cuál es el beneficio?



a) Pérdidas entre mayo y agosto y entre septiembre de octubre.

b) El máximo beneficio se produce en diciembre. El beneficio es de 6 000 euros.

12.A7 La siguiente gráfica muestra el nivel de ozono durante una hora de un día de verano en una ciudad. Estudia el crecimiento y el decrecimiento.



El nivel de ozono decrece entre $x = 0$ y $x = 0,25$ y entre $x = 0,5$ y $x = 1$. El nivel de ozono crece en el segundo cuarto de hora.

ENTRETENIDO

¿Quién miente?

Un chico y una chica están sentados uno junto al otro, no sabemos sus nombres, solo que uno tiene el pelo rubio y el otro es moreno.

Si sabemos que por lo menos, uno de los dos miente, ¿de qué color tiene el pelo cada uno?

Han mentido los dos. El individuo de cabellos negros es una chica mientras que el de cabellos rubios es un chico.